

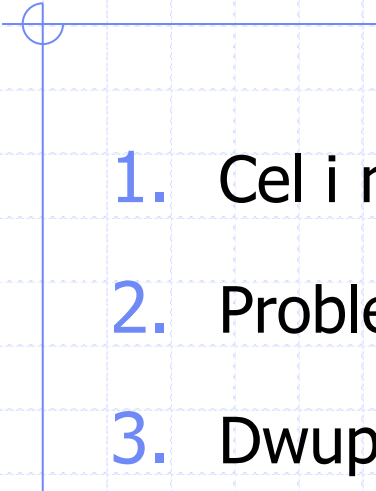
Interpolacja i modelowanie krzywych 2D i 3D

Dariusz Jacek Jakóbczak

Politechnika Koszalińska
Wydział Elektroniki i Informatyki
Zakład Podstaw Informatyki i Zarządzania

e-mail: Dariusz.Jakobczak@tu.koszalin.pl

Agenda



1. Cel i metody interpolacji
2. Problem
3. Dwupunktowa Interpolacja Gładka (DIG)
4. Wyniki i porównania
5. Wnioski i przyszłe badania

Interpolacja jako kluczowy element

- ◆ szacowania nieznanych wielkości w punktach pośrednich
 - prowadzenie gładkich krzywych przez punkty pomiarowe lub z symulacji (funkcje sklejane);
- ◆ Curve fitting – dopasowanie krzywej do punktów;
- ◆ analizy numerycznej:
 - funkcje sklejane są używane w numerycznym różniczkowaniu i całkowaniu,
 - rozwiązywaniu równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych,
 - znajdowaniu miejsc zerowych funkcji, zastępowaniu skomplikowanego wzoru funkcji prostszą formułą oraz obliczaniu wartości stabilizowanej funkcji w punkcie różnym od danych;
- ◆ CAD - funkcje sklejane (i ich uogólnienia)
 - podstawowe narzędzie projektowanie geometrycznego (CAD).

Metody interpolacji krzywych płaskich

◆ wielomianowa

- interpolacja dowolnej funkcji gładkiej o dowolnych węzłach,
- kubiczna - splajny stopnia 3;

◆ wymierna

- brak jednoznacznego rozwiązania;

◆ trygonometryczna

- tylko dla funkcji okresowych;

◆ wykładnicza;

◆ wielomianowe i wymierne interpolacyjne krzywe B-sklejane stopnia 3

- do grafiki i modelowania,
- nieodpowiednie do zastosowań numerycznych.

Oszacowanie błędu interpolacyjnego dla interpolacji wielomianowej

$$x_i = 0; 1; 2; 3 \quad x = 0.5; 2.5$$

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|$$

$$M_{n+1} = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$f(x) := 2^x \quad \frac{2.5 \cdot 8 \cdot 1.5 \cdot 0.25 \cdot \ln(2)^4}{24} = 0.072$$

$$f(x) := 8^x \quad \frac{2.5 \cdot 8^3 \cdot 1.5 \cdot 0.25 \cdot \ln(8)^4}{24} = 373.953$$

- ◆ wyższy stopień wielomianu interpolacyjnego (więcej węzłów) nie musi oznaczać poprawy jakości interpolacji
- ◆ przykładem negatywnym jest interpolowanie funkcji $y=|x|$, $y=1/x$, $y=1/(1+ax^2)$: im niższy stopień wielomianu, tym bezpieczniej

Pytania dotyczące interpolacji wielomianowej:

Jak zmniejszyć błąd interpolacji?

Jak wyeliminować ekstrema między węzłami?

Jak interpolować krzywe różniące się znacząco od wielomianu?

Jak interpolować funkcje nie mające pochodnej w węźle wewnętrznym?

Jak interpolować nie posiadając wiedzy o wartościach 2-ej pochodnej w węzłach (splajny kubiczne)?

Problem

◆ Dane:

zbiór punktów funkcji ciągłej na płaszczyźnie: (x_i, y_i) – minimum 3 węzły

◆ Ograniczenia:

- interpolowana krzywa będzie co najwyżej klasy $C1$;
- wyznaczany punkt zależy tylko od dwóch sąsiednich węzłów i zawarty jest w prostokącie określonym przez sąsiednie węzły;
- krzywa mogła być gładka w węzłach lub nie, w zależności od przyjętych założeń;
- numeracja węzłów zgodna z kolejnością ich położenia na krzywej;
- współrzędne y trzech kolejnych węzłów (jedna taka trójka węzłów) są monotoniczne lub znana jest wartość pochodnej w jednym węźle wewnętrznym;
- zbiór funkcji modelujących.

Problem

Czy przy określonych danych i przyjętych ograniczeniach możliwe jest interpolowanie i parametryzowanie krzywej tak, aby mieć pewność co do następujących cech:

- a) brak ekstremów między węzłami (mniejszy błąd w porównaniu z interpolacją wielomianową);
- b) interpolację w punkcie, gdzie brak pochodnej;
- c) jednoznaczną interpolację bez wiedzy o wartości 2-ich pochodnych w węzłach?

Dwupunktowa Interpolacja Gładka (DIG)

węzły: $p_1=(x_1,y_1), p_2=(x_2,y_2), \dots, p_n=(x_n,y_n)$

kombinacja węzłów: $h(p_1, p_2, \dots, p_m)$

$$x(\alpha) = \alpha \cdot x_i + (1-\alpha) \cdot x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$y(\alpha) = \gamma \cdot y_i + (1-\gamma) y_{i+1} + \gamma(1-\gamma) \cdot h(p_1, p_2, \dots, p_m)$$

$$\alpha \in [0;1], \gamma = F(\alpha) \in [0;1], F:[0;1] \rightarrow [0;1],$$

$$F(0)=0, F(1)=1, F - \text{rosnąca}$$

Funkcje modelujące – przykłady

$h = 0 :$

$$y(\alpha) = \gamma \cdot y_i + (1 - \gamma) y_{i+1}$$

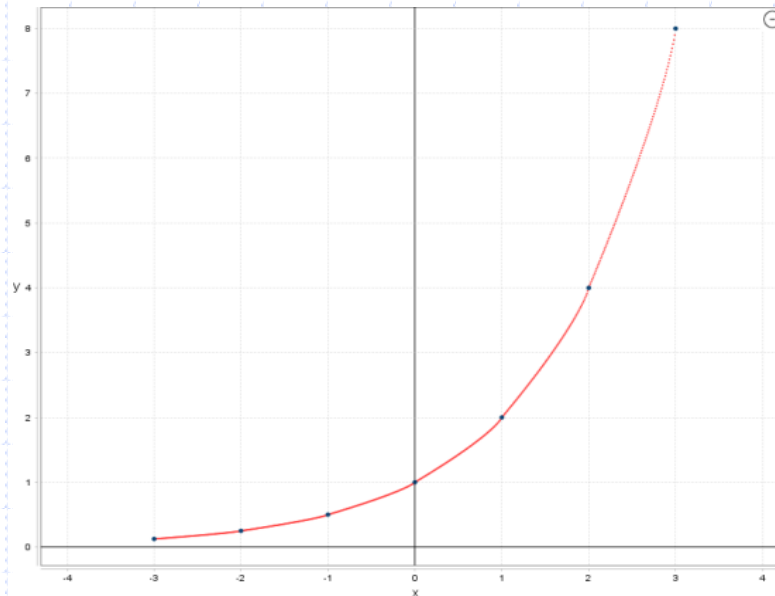
parametry rzeczywiste: $\alpha \in [0; 1]$ oraz $s > 0$

$$\begin{aligned} &\gamma = \alpha^s, \gamma = \sin(\alpha^s \cdot \pi/2), \gamma = \sin^s(\alpha \cdot \pi/2), \gamma = 1 - \cos(\alpha^s \cdot \pi/2), \\ &\gamma = 1 - \cos^s(\alpha \cdot \pi/2), \gamma = \tan(\alpha^s \cdot \pi/4), \gamma = \tan^s(\alpha \cdot \pi/4), \\ &\gamma = \log_2(\alpha^s + 1), \gamma = \log_2^s(\alpha + 1), \gamma = (2^\alpha - 1)^s, \gamma = 2/\pi \cdot \arcsin(\alpha^s), \\ &\gamma = (2/\pi \cdot \arcsin \alpha)^s, \gamma = 1 - 2/\pi \cdot \arccos(\alpha^s), \gamma = 1 - (2/\pi \cdot \arccos \alpha)^s, \\ &\gamma = 4/\pi \cdot \arctan(\alpha^s), \gamma = (4/\pi \cdot \arctan \alpha)^s, \gamma = \operatorname{ctg}(\pi/2 - \alpha^s \cdot \pi/4), \\ &\gamma = \operatorname{ctg}^s(\pi/2 - \alpha \cdot \pi/4), \gamma = 2 - 4/\pi \cdot \operatorname{arcctg}(\alpha^s), \gamma = (2 - 4/\pi \cdot \operatorname{arcctg} \alpha)^s, \\ &\gamma = \beta \cdot \alpha^2 + (1 - \beta) \cdot \alpha, \gamma = \beta \cdot \alpha^4 + (1 - \beta) \cdot \alpha, \dots, \gamma = \beta \cdot \alpha^{2k} + (1 - \beta) \cdot \alpha, \\ &\beta \in [0; 1], k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Wybór dwóch funkcji modelujących umożliwiających:

- gładkość w węzłach wewnętrznych
- określenie wypukłości między węzłami

$$\gamma = \alpha^s, \quad \gamma = \sin(\alpha^s \cdot \pi/2)$$



Przykład interpolacji DIG (bez założenia gładkości w węzłach) funkcji $y=2^x$ dla 7 węzłów oraz $h=0$, $\gamma=\alpha^{0.8}$.

Metoda DIG

1. współrzędne y trzech kolejnych węzłów są monotoniczne – obliczenie współczynnika s dla funkcji modelującej między 1 i 3 węzłem z uwzględnieniem węzła środkowego

$$\alpha = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} \in (0;1) \quad t = \frac{y_{i+1} - y_i}{y_{i+1} - y_{i-1}} \in (0;1)$$

- (*) w zależności od położenia 4 węzła względem 3 (wypukłość):

$$s = \log_{\alpha} t \quad s = \log_{\alpha} \left(\frac{2}{\pi} \arcsin t \right)$$

2. wyznaczenie s dla kolejnego przedziału węzłów tak, aby iloraz różnicowy lewo- i prawostronny był taki sam w danym węźle wewnętrznym: wybór γ analogiczny jak (*).
3. punkt 2 powtarzany jest dla każdego przedziału węzłów.

Ad. 2)

Wyznaczenie s dla kolejnego przedziału węzłów

c – wartość ilorazu różnicowego lewostronnego (lub wartość pochodnej $\neq 0$)

$$u = 1 - c(1 - \alpha) \frac{x_{i+1} - x_i}{y_{i+1} - y_i}$$

- jeżeli $\gamma = \alpha^s$

$$s = \log_{\alpha} u$$

- jeżeli $\gamma = \sin(\alpha^s \cdot \pi/2)$

$$s = \log_{\alpha} \left(\frac{2}{\pi} \arcsin u \right)$$

Jeżeli węzeł, dla którego porównujemy ilorazy różnicowe oraz jego węzły sąsiednie nie są monotoniczne, to:

$$u = 1 + c(1 - \alpha) \frac{x_{i+1} - x_i}{y_{i+1} - y_i}$$

Cechy DIG

- ◆ dokładniejsza interpolacja możliwa kosztem gładkości w węzłach;
- ◆ określenie wypukłości między węzłami za pomocą wyboru funkcji modelującej;
- ◆ jeżeli $y_i = y_{i+1}$, to funkcja stała między tymi węzłami – brak gładkości w tych węzłach;
- ◆ stabilność – niewielka zmiana węzła powoduje niewielkie zmiany wyniku;
- ◆ jeżeli znana jest wartość pochodnej $\neq 0$ w jednym węźle wewnętrznym, to przyrównując do niej iloraz różnicowy lewo- i prawostronny wyznaczamy s na lewo i prawo od tego węzła.

Przykład 1: $y=1/(1+x^2)$ – gładka w węźle (0;1)

x	y-DIG	błąd=
-1	0,5	0
-0,9	0,520788	0,031699
-0,8	0,573796	0,03596
-0,7	0,645368	0,025773
-0,6	0,723761	0,011533
-0,5	0,8	0
-0,4	0,867902	0,005833
-0,3	0,923627	0,006196
-0,2	0,965006	0,003467
-0,1	0,990825	0,000726
0	1	0

0,121187

x	y-DIG	błąd=
0	1	0
0,1	0,990825	0,000726
0,2	0,964565	0,003027
0,3	0,923583	0,006152
0,4	0,870731	0,008662
0,5	0,809187	0,009187
0,6	0,742309	0,007015
0,7	0,673557	0,002416
0,8	0,606538	0,003218
0,9	0,545503	0,006983
1	0,5	0

0,047385

x	y-DIG	błąd=
-1	0,5	0
-0,9	0,5608	0,008314
-0,8	0,6224	0,012644
-0,7	0,6836	0,012459
-0,6	0,7432	0,007906
-0,5	0,8	1,11E-16
-0,4	0,8528	0,009269
-0,3	0,9004	0,017031
-0,2	0,9416	0,019938
-0,1	0,9752	0,014899
0	1	0

0,10246

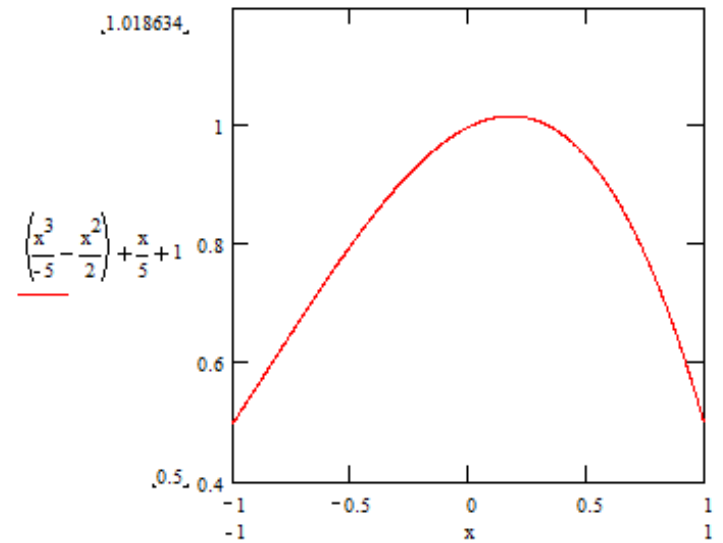
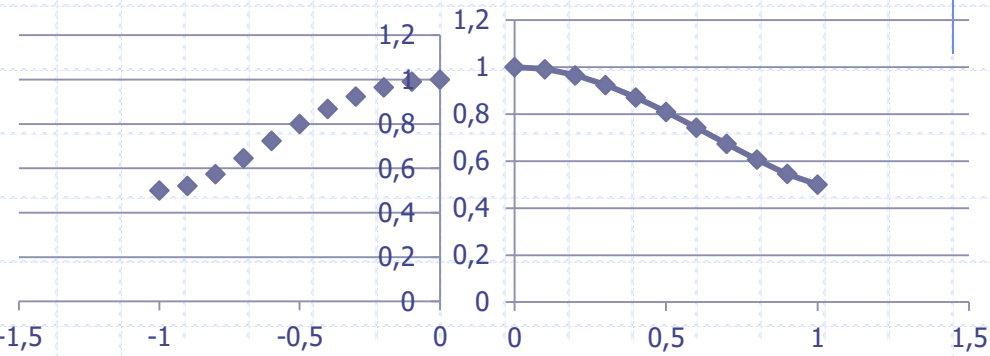
x	y-DIG	błąd=
0	1	0
0,1	1,0148	0,024701
0,2	1,0184	0,056862
0,3	1,0096	0,092169
0,4	0,9872	0,125131
0,5	0,95	0,15
0,6	0,8968	0,161506
0,7	0,8264	0,155259
0,8	0,7376	0,127844
0,9	0,6292	0,076714
1	0,5	1,11E-16

0,970185

$$\gamma = \sin(\alpha^s \cdot \pi/2)$$

s=1.932

s=1.236



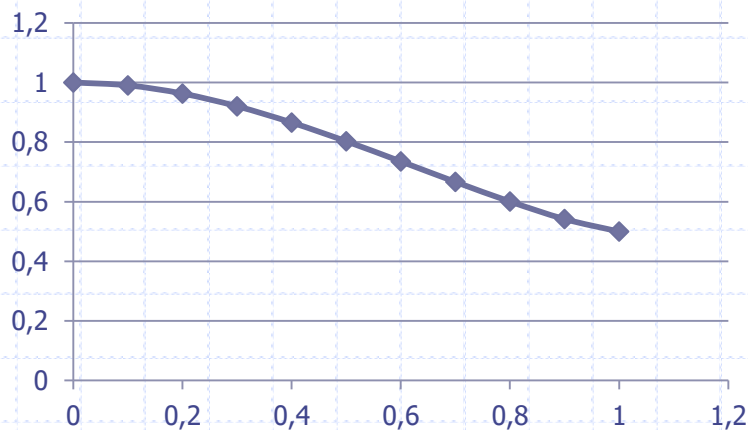
DIG dla $y=1/(1+x^2)$: „nie jest gładka” w węźle (0;1), ale interpolacja dokładniejsza

$$\gamma = \sin(\alpha^s \cdot \pi/2)$$

$$s=1.272$$

x	y-DIG	błąd=
0	1	0
0,1	0,990327	0,000228
0,2	0,962803	0,001265
0,3	0,920166	0,002735
0,4	0,865647	0,003578
0,5	0,80277	0,00277
0,6	0,735186	0,000109
0,7	0,666574	0,004567
0,8	0,600698	0,009058
0,9	0,541935	0,010551
1	0,5	0

0,03486



Przykład 2: $y=1/x$ – gładka w węźle (2;0.5)

x	y-DIG	błąd=
0,5	2	0
0,65	1,627485	0,089024
0,8	1,319431	0,069431
0,95	1,070667	0,018035
1,1	0,875828	0,033263
1,25	0,729323	0,070677
1,4	0,625276	0,08901
1,55	0,557457	0,087704
1,7	0,519152	0,069083
1,85	0,502928	0,037612
2	0,5	0

0,563839

x	y-DIG	błąd=
2	0,5	0
2,2	0,496096	0,04155
2,4	0,491804	0,075137
2,6	0,487028	0,102413
2,8	0,481632	0,124489
3	0,475408	0,142075
3,2	0,468018	0,155518
3,4	0,458847	0,164729
3,6	0,446572	0,168795
3,8	0,427236	0,164078
4	0,25	1,11E-16

1,138785

x	y-DIG	błąd=
0,5	2	0
0,65	1,629781	0,09132
0,8	1,322	0,072
0,95	1,071594	0,018962
1,1	0,8735	0,035591
1,25	0,722656	0,077344
1,4	0,614	0,100286
1,55	0,542469	0,102693
1,7	0,503	0,085235
1,85	0,490531	0,050009
2	0,5	0

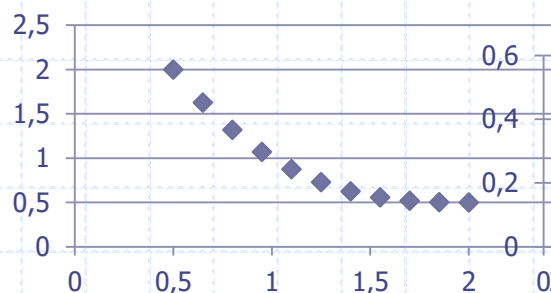
0,633439

x	y-DIG	błąd=
2	0,5	0
2,2	0,538	0,083455
2,4	0,594	0,177333
2,6	0,656	0,271385
2,8	0,712	0,354857
3	0,75	0,416667
3,2	0,758	0,4455
3,4	0,724	0,429882
3,6	0,636	0,358222
3,8	0,482	0,218842
4	0,25	1,11E-16

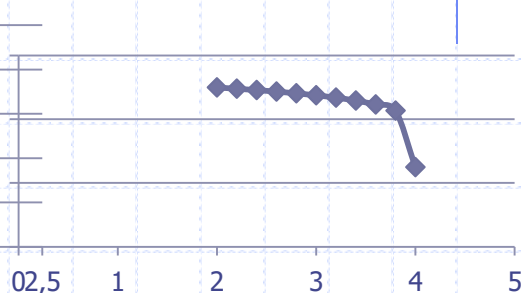
2,756143

$$y=a^s$$

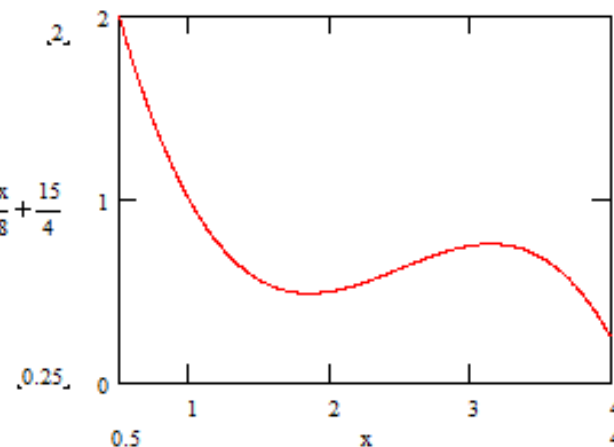
s=2.710



s=0.149



$$\frac{x^3}{-4} + \frac{15x^2}{8} - \frac{35x}{8} + \frac{15}{4}$$

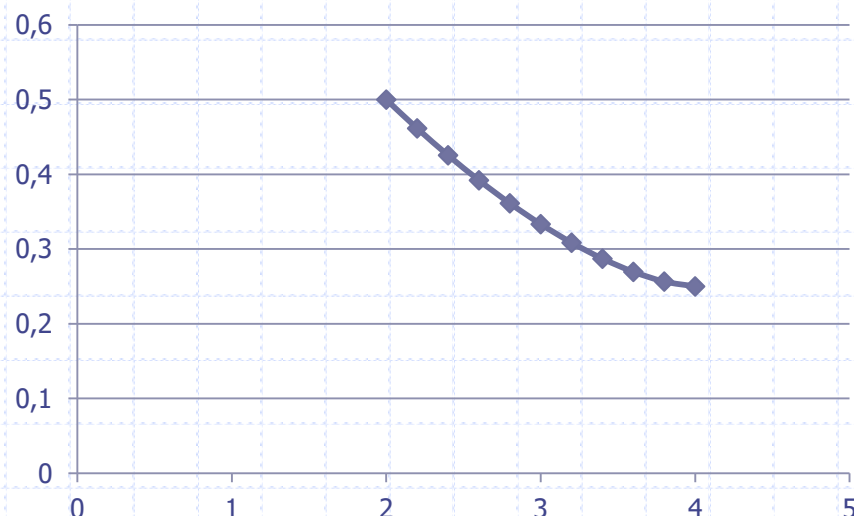


DIG dla $y=1/x$: „nie jest gładka” w węźle (2;0.5), ale dokładniejsza interpolacja

$$y = a^s$$

$$s = 1.585$$

x	y	błąd=
2	0,5	0
2,2	0,461551	0,007005
2,4	0,425524	0,008858
2,6	0,392043	0,007428
2,8	0,361252	0,00411
3	0,333331	2,17E-06
3,2	0,308507	0,003993
3,4	0,287083	0,007034
3,6	0,269502	0,008276
3,8	0,2565	0,006657
4	0,25	1,11E-16
		0,053364

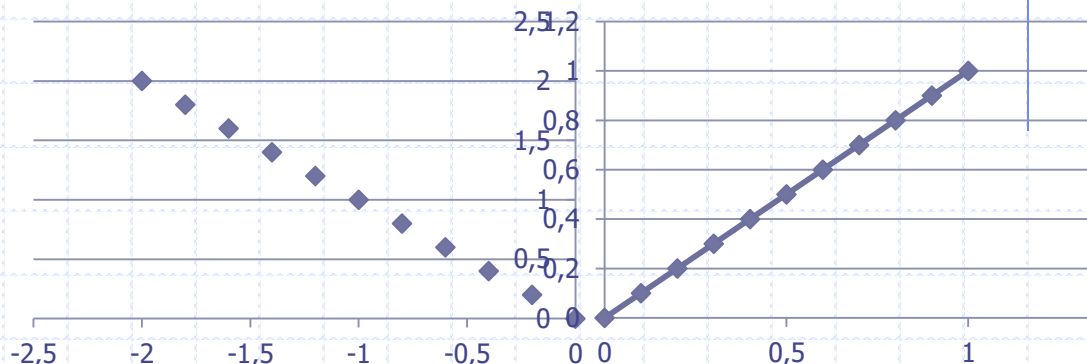


Przykład 3: $y=|x|$

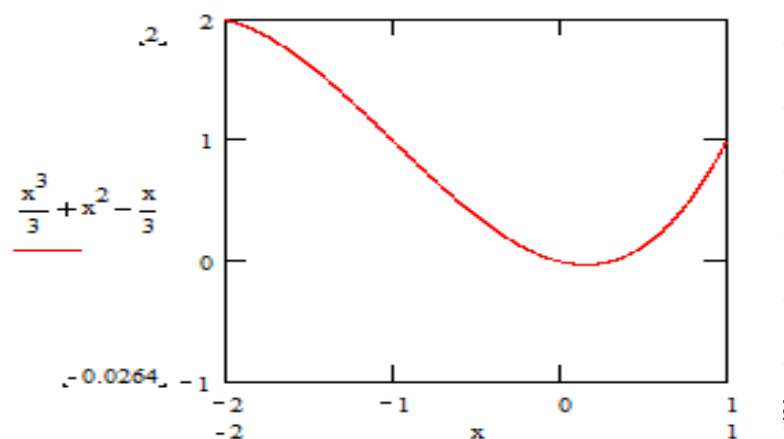
$$y=a^s$$

$$s=1$$

x	y-DIG	błąd=	x	y-DIG	błąd=
-2	2	0	0	0	0
-1,8	1,8	0	0,1	0,1	2,78E-17
-1,6	1,6	0	0,2	0,2	5,55E-17
-1,4	1,4	0	0,3	0,3	0
-1,2	1,2	0	0,4	0,4	0
-1	1	0	0,5	0,5	0
-0,8	0,8	0	0,6	0,6	0
-0,6	0,6	0	0,7	0,7	0
-0,4	0,4	0	0,8	0,8	1,11E-16
-0,2	0,2	0	0,9	0,9	1,11E-16
0	0	0	1	1	1,11E-16
		0			4,16E-16



-2	2	0	0	0	0
-1,8	1,896	0,096	0,1	-0,023	0,123
-1,6	1,728	0,128	0,2	-0,024	0,224
-1,4	1,512	0,112	0,3	-0,001	0,301
-1,2	1,264	0,064	0,4	0,048	0,352
-1	1	0	0,5	0,125	0,375
-0,8	0,736	0,064	0,6	0,232	0,368
-0,6	0,488	0,112	0,7	0,371	0,329
-0,4	0,272	0,128	0,8	0,544	0,256
-0,2	0,104	0,096	0,9	0,753	0,147
-2,78E-16	9,25E-17	9,25E-17	1	1	1,11E-16
		0,8			2,475



$y=|x|$ - DIG dla „gładkiej” w (0;0)

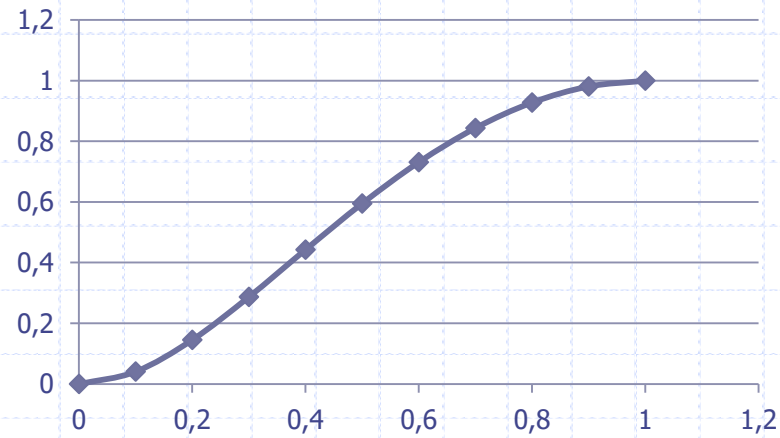
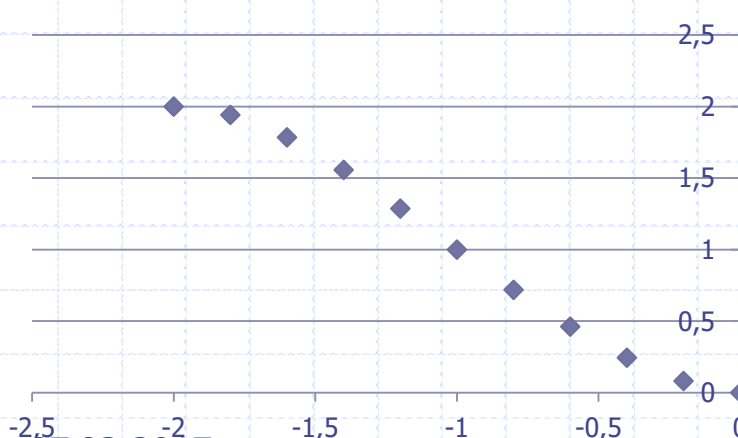
$$\gamma = \sin(\alpha^s \cdot \pi/2)$$

$s=1.585$

x	y-DIG	błąd=
-2	2	0
-1,8	1,941923	0,141923
-1,6	1,785004	0,185004
-1,4	1,55728	0,15728
-1,2	1,286956	0,086956
-1	1	2,22E-16
-0,8	0,718792	0,081208
-0,6	0,461817	0,138183
-0,4	0,244468	0,155532
-0,2	0,081671	0,118329
-2,8E-16	0	2,78E-16
		1,064416

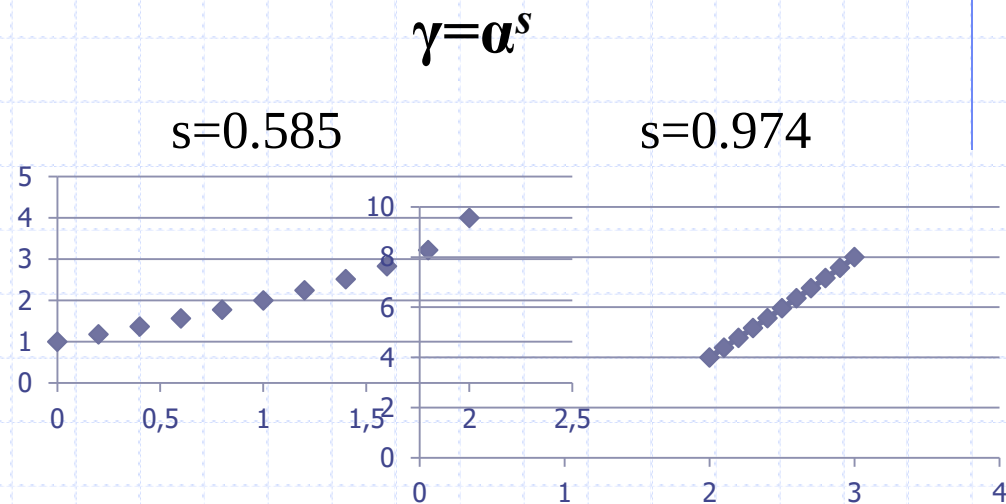
$s=1.913$

x	y-DIG	błąd=
0	0	0
0,1	0,040835	0,059165
0,2	0,145301	0,054699
0,3	0,286914	0,013086
0,4	0,442706	0,042706
0,5	0,594935	0,094935
0,6	0,731215	0,131215
0,7	0,843699	0,143699
0,8	0,927811	0,127811
0,9	0,980818	0,080818
1	1	0
		0,748134

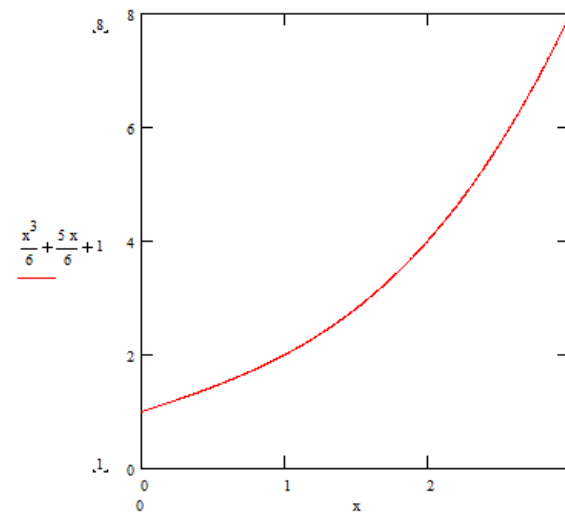


Przykład 4: $y=2^x$ – gładka w węźle (2;4)

x	y-DIG	błąd=	x	y	błąd=
0	1	0	2	4	0
0,2	1,179313	0,030615	2,1	4,390058	0,102964
0,4	1,367111	0,047603	2,2	4,781254	0,18646
0,6	1,564941	0,049225	2,3	5,173735	0,249158
0,8	1,774908	0,033806	2,4	5,567693	0,289661
1	2	0	2,5	5,96338	0,306526
1,2	2,244741	0,052656	2,6	6,36116	0,298293
1,4	2,516605	0,122411	2,7	6,761579	0,26356
1,6	2,829827	0,201606	2,8	7,165576	0,201172
1,8	3,219885	0,262317	2,9	7,575149	0,110885
2	4	8,88E-16	3	8	5,33E-15
		0,80024			2,008679



0	1	0	2	4	0
0,2	1,168	0,019302	2,1	4,2935	0,006406
0,4	1,344	0,024492	2,2	4,608	0,013207
0,6	1,536	0,020283	2,3	4,9445	0,019922
0,8	1,752	0,010899	2,4	5,304	0,025968
1	2	0	2,5	5,6875	0,030646
1,2	2,288	0,009397	2,6	6,096	0,033134
1,4	2,624	0,015016	2,7	6,5305	0,032481
1,6	3,016	0,015433	2,8	6,992	0,027595
1,8	3,472	0,010202	2,9	7,4815	0,017236
2	4	0	3	8	1,78E-15
		0,125024			0,206595

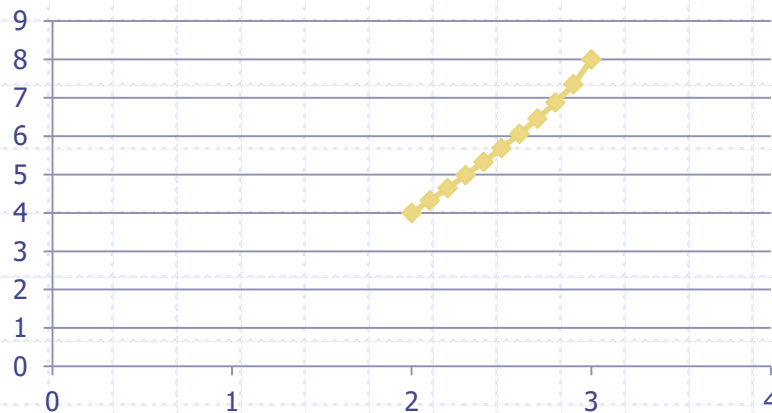


$y=2^x$ – „nie jest gładka” w węźle (2;4)

$$y=a^s$$

$$s=0.791$$

x	y	błąd=
2	4	0
2,1	4,319847	0,032754
2,2	4,647227	0,052433
2,3	4,983297	0,058719
2,4	5,329592	0,05156
2,5	5,688227	0,031372
2,6	6,062287	0,000579
2,7	6,456655	0,041364
2,8	6,880112	0,084293
2,9	7,352768	0,111496
3	8	5,33E-15
		0,464571



Analiza błędów interpolacji

funkcja - 4 węzły	wiel. 3 st. - suma błędów	DIG (gładka)-suma błędów	DIG (brak gładkości)- suma błędów
$y=1/(1+x^2)$	1,072645	0,168572	0,156047
$y=1/x$	3,389582	1,702624	0,617203
$y=\text{abs}(x)$	3,275	1,81255	0
$y=2^x$	0,331619	2,808919	1,264811

Złożoność obliczeniowa:

- ◆ wielomianowe splajny 3 stopnia: rozwiązanie układu równań liniowych $m \times m$, gdzie m to liczba wszystkich węzłów $O(m)$;

- ◆ DIG – obliczenie wartości:

$$s > 0$$

$$\gamma = \alpha^s$$

$$\gamma = \sin(\alpha^s \cdot \pi/2)$$

$$\alpha, t \in (0;1)$$

$$s = \log_{\alpha} t \quad s = \log_{\alpha} \left(\frac{2}{\pi} \arcsin t \right)$$

Splajn kubiczny dla węzłów $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ –
rozwiązanie nie jest jednoznaczne

$$w(x) = -5x^3 + 4x, x \in [-1;0]$$

Ekstrema między węzłami

$$w(x) = -3x^3 + 4x, x \in (0;1]$$

lub

$$w(x) = x^2$$

Wartości 2-ich pochodnych w węzłach – jednoznaczne
rozwiązanie

Zastosowanie interpolacji DIG

Obliczanie prawdopodobieństwa w rozkładzie ciągłym, jeżeli:

gęstość rozkładu nie jest znana – przy przejściu z rozkładu dyskretnego (skokowego) do ciągłego dana jest tylko skończona liczba punktów leżących na krzywej

Konieczność numerycznego całkowania gęstości, opartego na interpolacji wartości funkcji – obliczanie kwadratur (np. metodą prostokątów, trapezów czy parabol)

Rozkład Cauchy'ego – przykład dokładniejszej interpolacji DIG niż wielomianowa

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

Wnioski

- ◆ Błąd DIG w każdym przedziale węzłów (oszacowanie ogólne):

$$\varepsilon_i \leq |y_{i+1} - y_i|$$

- ◆ Zastosowanie:
 - analiza numeryczna,
 - dopasowanie krzywej do danych.
- ◆ Brak negatywnych cech interpolacji wielomianowej (np. zjawisko Rungego, niepożądane ekstrema).
- ◆ Możliwość interpolacji krzywej gładkiej w węzłach lub nie
 - w zależności od przyjętych założeń
- ◆ Parametryzacja krzywej niezależnie między każdą parą węzłów.

Krzywa w 3D

$$x(\alpha) = \alpha \cdot x_k + (1 - \alpha)x_{k+1}$$

$$y(\alpha) = \gamma \cdot y_k + (1 - \gamma)y_{k+1}$$

$$z(\alpha) = \bar{\gamma} \cdot z_k + (1 - \bar{\gamma})z_{k+1} + \bar{\gamma}(1 - \bar{\gamma}) \cdot h(p_1, p_2, \dots, p_m)$$

Dalsze badania:

1. dobór funkcji modelującej z liczniejszego zbioru,
2. dobór węzłów dla najlepszej interpolacji,
3. wyższa klasa niż $C1$,
4. ekstrapolacja danych dla $\alpha \notin [0;1]$,
5. dokładniejsze oszacowanie błędu,
6. dobór współczynnika s dla najdokładniejszej interpolacji bez warunku gładkości w węzłach wewnętrznych,
7. przekształcenia geometryczne krzywej,
8. dowolna krzywa otwarta lub zamknięta,
9. analiza własności krzywych w 3D.

Interpolacja i modelowanie krzywych 2D i 3D

Dariusz Jacek Jakóbczak

Dziękuję za uwagę

e-mail: Dariusz.Jakobczak@tu.koszalin.pl